

Classifications formelle et analytique des feuilletages noeud-col.
Mémoire de Master 1

Gaëtan DELERS et Vincent NOLOT

12 juin 2009

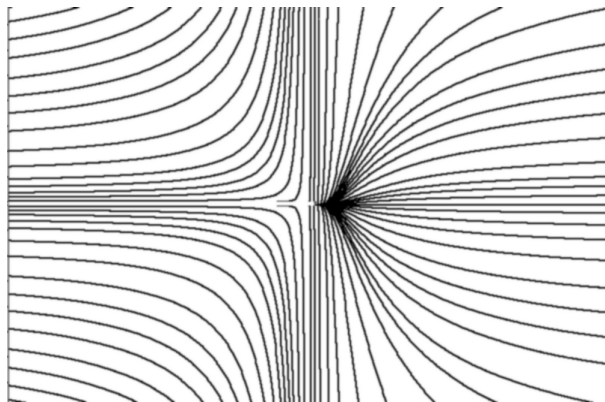


Table des matières

1	Introduction - présentation	3
1.1	Introduction	3
1.2	Généralités mathématiques	4
1.3	Cadre de travail	4
2	Classification formelle	5
2.1	Introduction	5
2.1.1	Définitions et notations	5
2.1.2	Présentation de la démarche	5
2.2	Théorème de classification formelle	6
2.2.1	Enoncé	6
2.2.2	Lemmes utiles	6
2.2.3	Démonstration du théorème 1	8
3	Classification analytique	10
3.1	Introduction	10
3.1.1	Définitions et notations	10
3.1.2	Présentation de la démarche	12
3.1.3	Recollement analytique	12
3.2	Théorème de classification analytique	12
3.2.1	Enoncé	12
3.2.2	Explications	13
3.2.3	Détails pour $k = 2$	13
4	Conclusion	17

1 Introduction - présentation

1.1 Introduction

→ Au cours de notre mémoire, nous étudions des germes de champs de vecteurs holomorphes

$$Z(x, y) = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

On se place ensuite sur un voisinage de l'origine et on suppose que sur ce voisinage le champ Z ne possède qu'une singularité : $(0, 0)$. Nous regardons maintenant la partie linéaire de Z qui s'écrit

$$\begin{aligned} Z_1(x, y) &= (ax + by) \frac{\partial}{\partial x} + (cx + dy) \frac{\partial}{\partial y} \\ &= \begin{bmatrix} a \frac{\partial}{\partial x} & b \frac{\partial}{\partial x} \\ c \frac{\partial}{\partial y} & d \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et notons les valeurs propres de la matrice associée λ_1, λ_2 (classées par ordre croissant de module).

→ Z admet une singularité réduite en $(0, 0)$ si $\lambda_2 \neq 0$ et si

$$\lambda := \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_+^*$$

On parlera de

1. singularité **hyperbolique** si $\lambda \notin \mathbb{R}$.
2. **noeud** si $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$.
3. **selle résonnante** si $\lambda \in \mathbb{Q}_+^*$.
4. **selle irrationnelle** si $\lambda \in \mathbb{R}_- \setminus \mathbb{Q}$.
5. **noeud-col** si $\lambda = 0$.

→ Notre travail porte sur les singularités de type *noeud-col*. Nous introduirons la notion de feuilletage (induit par un champ de vecteurs).

→ Plus précisément, nous nous intéressons à la classification de ces feuilletages. Après avoir rappelé des notions mathématiques qui nous seront utiles pour le développement, nous reprenons en détails la classification formelle (traitée par Dulac, Martinet, Ramis), puis expliquons le principe de la classification analytique qui repose sur les invariants de Martinet-Ramis.

→ Nous finissons notre étude par traiter un cas particulier ($k = 2$) et un exemple $x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$.

1.2 Généralités mathématiques

Définition 1 *Un champ de vecteurs est une fonction qui associe un vecteur à chaque point d'un espace euclidien ou plus généralement d'une variété différentielle.*

Ex : L'eau d'un cours d'eau. La donnée de sa température en chaque point forme un *champ de scalaires*, celle de sa vitesse en chaque point, un *champ de vecteurs*.

Définition 2 *Un champ de vecteurs a une singularité de type noeud-col si en ce point :*

1. *Il s'annule.*
2. *Sa partie linéaire possède exactement une valeur propre non nulle.*

Remarque : On ne travaillera qu'au voisinage de $(0, 0)$, ainsi la singularité d'un champs de vecteurs que l'on étudiera sera systématiquement en $(0, 0)$.

Définition 3 *On note $\mathbb{C}[[x, y]]$ l'ensemble des séries formelles en $(0, 0)$ sur \mathbb{C} . On dit que $U \in \mathbb{C}[[x, y]]$ est une unité formelle si son terme constant n'est pas nul.*

1.3 Cadre de travail

→ Nous travaillerons tout au long de l'article sur un champ de vecteurs Z ayant une singularité isolée en $(0, 0)$

$$Z(x, y) = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

où $A, B \in \mathbb{C}[[x, y]]$ sont des germes de fonctions holomorphes en $(0, 0)$ (origine du plan complexe).

Notations :

1. On pourra écrire

$$Z(x, y) = (A(x, y) \quad B(x, y)) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A(x, y) \\ B(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z \cdot x \\ Z \cdot y \end{bmatrix}.$$

2. Si $F \in \mathbb{C}[[x, y]]$ alors on note $Z \cdot F$ la dérivée de F par rapport au champs Z . Dans notre cas cela s'écrit

$$Z \cdot F = DF(Z) = A \frac{\partial F}{\partial x} + B \frac{\partial F}{\partial y}$$

→ Dans le cas où la singularité est de type *noeud-col*, il faudra remarquer qu'en redressant les séparatrices (définies plus loin) du champ, sur les axes de coordonnées, et en divisant par une unité, Z s'écrira :

$$Z = x^{k+1} \frac{\partial}{\partial x} + (y + \dots) \frac{\partial}{\partial y}$$

où "..." représentent des termes d'ordre supérieur strict à 1

2 Classification formelle

2.1 Introduction

2.1.1 Définitions et notations

Définition 4 Deux champs de vecteurs Z et K sont formellement conjugués s'il existe un changement de variables $\Psi = (\Psi_x, \Psi_y)$ où $\Psi_x, \Psi_y \in \mathbb{C}[[x, y]]$ et tel que

$$\Psi^* Z := D\Psi^{-1} \left(Z(\Psi_x, \Psi_y) \right) = K$$

avec $D\Psi$ la différentielle de Ψ .

Définition 5 Si Z et K sont deux champs de vecteurs tels que $\Psi^* Z = UK$ où U est une unité formelle, alors on dit que Z et K sont formellement équivalents.

Définition 6 Pour $t \in \mathbb{C}$, on définit le flot Φ_Z^t d'un champs de vecteur Z , par

$$\Phi_Z^t(x, y) = \begin{pmatrix} e^{tZ} \cdot x \\ e^{tZ} \cdot y \end{pmatrix} = (e^{tZ} \cdot Id)(x, y)$$

Remarque : Le flot est une série formelle en (x, y) dont les coefficients sont des fonctions entières de t . Lorsqu'on remplace t par une série formelle $F(x, y)$ on obtient un changement de variable formel, que l'on appelle *difféomorphisme tangentiel*.

→ Les difféomorphismes tangentiels sont caractérisés par le fait que ce sont des symétries du feuilletage \mathcal{F} , et qui fixent (au moins sur des secteurs) chaque feuille \mathcal{F} .

Notations : Si $G \in \mathbb{C}[[x, y]]$, on écrira pour le flot considéré ci-dessus :

$$G \circ \phi_Z^t = e^{tZ} \cdot G = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} Z \cdot^n G$$

où $Z \cdot^0 G = G$ et $Z \cdot^{n+1} G = Z \cdot (Z \cdot^n G)$.

2.1.2 Présentation de la démarche

→ Citons le résultat de Poincaré-Dulac : tout champ de vecteurs ayant une singularité de type *noeud-col* en $(0, 0)$ est formellement équivalent à un seul des modèles formels

$$X_{k,\mu} = x^{k+1} \frac{\partial}{\partial x} + y(1 + \mu x^k) \frac{\partial}{\partial y}$$

Autrement dit pour un tel champ de vecteurs Z , il existe une unité formelle U telle que

$$Z = UX_{k,\mu}$$

C'est un résultat que nous admettons. Ecrit sous cette forme, on dit que Z est sous *forme normale formelle*.

→ Nous allons le préciser en démontrant qu'en fait Z est formellement conjugué à $PX_{k,\mu}$ où $P(0) = \lambda$ avec λ la valeur propre non nulle de la partie linéaire de Z .

2.2 Théorème de classification formelle

2.2.1 Enoncé

THÉORÈME 1

1) Si Z est un champ de vecteurs de type noeud-col, alors il existe un unique couple $(k, \mu) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$ et un polynôme $P \in \mathbb{C}_k[x]$ vérifiant $P(0) = \lambda$ et tels que Z soit formellement conjugué à Z_P où :

$$Z_P(x, y) = P(x) \left(x^{k+1} \frac{\partial}{\partial x} + y(1 + \mu x^k) \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

2) Deux champs Z_P et Z_Q (avec les notations ci-dessus) sont formellement conjugués si et seulement si il existe α une racine $k^{\text{ième}}$ de l'unité vérifiant $P(x) = Q(\alpha x)$.

2.2.2 Lemmes utiles

Remarque : Nous supposons que Z est déjà sous la forme $Z = UX_{k,\mu}$ où U est une unité formelle.

LEMME 1 Soient $Z = UX_{k,\mu}$ et une série formelle $G = \sum g_{m,n} x^m y^n \in \mathbb{C}[[x, y]]$. Alors l'équation homologique $Z \cdot F = G$ admet F une série formelle comme solution si et seulement si $g_{m,0} = 0$ pour tout $m \leq k$. De plus, si F existe, elle est unique à l'addition d'un scalaire près.

Démonstration

→ Si $Z = UX_{k,\mu}$ alors on a $Z \cdot F = G \Leftrightarrow X_{k,\mu} \cdot F = U^{-1}G$. De plus $U^{-1}G$ contient des termes non nuls en $1, x, \dots, x^k \Leftrightarrow G$ contient des termes non nuls en $1, x, \dots, x^k$.

On en déduit qu'il suffit de s'intéresser directement au cas où $Z = X_{k,\mu}$ i.e où $U = 1$.

→ Intéressons nous donc à l'équation homologique

$$X_{k,\mu} \cdot F = G \tag{1}$$

On cherche $F \in \mathbb{C}[[x, y]]$ une série formelle qui s'écrit $F = \sum f_{m,n} x^m y^n$. De même pour $G = \sum g_{m,n} x^m y^n$. On peut alors identifier les termes en y^n de l'équation (1). Nous obtenons ainsi :

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{m,n \leq 0} g_{m,n} x^m y^n = \sum_{n \geq 0, m \geq 1} m f_{m,n} x^{m+k} y^n + \sum_{n \geq 1, m \geq 0} (1 + \mu x^k) f_{m,n} n x^m y^n$$

Et

1. Pour $n = 0$: en réécrivant l'égalité ci-dessus nous obtenons

$$\sum_{m \geq 0} g_{m,0} x^m = x^k \sum_{m \geq 1} m f_{m,0} x^m + 0$$

Cela signifie que, si (1) admet une solution $F \in \mathbb{C}[[x, y]]$ alors G ne peut posséder de termes en x^m pour tout $m \leq k$.

Et si G ne possède aucun termes en x^m pour $m \leq k$, alors on peut trouver pour $m > 0$, $f_{m,0} = \frac{1}{m} g_{m+k,0}$.

On remarque cependant qu'il n'y a aucune restriction sur la constante $f_{0,0}$.

2. Pour $n > 0$: en réécrivant l'égalité ci-dessus nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 0} g_{m,n} x^m &= \sum_{m \geq 1} m f_{m,n} x^{m+k} + \sum_{m \geq 0} (1 + \mu x^k) f_{m,n} n x^m \\ &= \sum_{m \geq 0} \left(m x^k + n(1 + \mu x^k) \right) f_{m,n} x^m \end{aligned}$$

Cela signifie que, si (1) admet une solution $F \in \mathbb{C}[[x, y]]$ alors pour $m \leq k$ on a $g_{m,n} = n f_{m,n}$ i.e $g_{m,0} = 0$ pour tout $m \leq k$.

Et si G ne possède aucun termes en x^m pour $m \leq k$, alors on détermine F ainsi :

$$f_{m,n} = \frac{1}{n(1 + \mu x^k) + m x^k} g_{m,n}$$

■

Remarque : Comme nous l'avons signalé dans la démonstration, il est important de remarquer que la série formelle F solution est entièrement déterminée sauf son terme constant $f_{0,0}$, ce qui justifie l'unicité à l'addition d'un scalaire près.

LEMME 2 Soient Z un champ de vecteurs singulier en $(0, 0)$ (général) et $F \in \mathbb{C}[[x, y]]$ une série formelle. Alors $\Psi = \phi_Z^F$ est un changement de variables formel tangent à l'identité vérifiant

$$\Psi^* Z = \frac{1}{1 + Z \cdot F} Z$$

Démonstration

Posons

$$\begin{cases} g(x, y, t) &= \phi_Z^t(x, y) \\ \pi(x, y) &= (x, y, F(x, y)) \end{cases}$$

→ D'après la dernière remarque, Ψ est un changement de variables formel. Par conséquent, par Ψ , Z est équivalent avec lui-même, autrement dit $\Psi^* Z = W Z$ où $W \in \mathbb{C}[[x, y]]$ une unité formelle.

→ On sait que

$$\begin{aligned}\Psi^* Z &= D\Psi^{-1}(Z \circ \Psi) \\ &= (Z \circ \Psi) \cdot \Psi^{-1}\end{aligned}$$

Donc l'équation devient

$$Z \circ \Psi = WZ \cdot \Psi$$

Nous avons $\Psi(x, y) = g \circ \pi(x, y)$. Et

$$\begin{aligned}Z \cdot \Psi &= D\Psi(Z) \\ &= Dg \circ \pi(Z) \\ &= Dg(\pi(Z)) \circ D\pi(Z) \\ &= Dg(\pi(Z)) \left(\begin{bmatrix} Z \cdot x \\ Z \cdot y \\ Z \cdot F \end{bmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} Z \cdot x \\ Z \cdot y \\ Z \cdot F \end{bmatrix} \cdot \phi_Z^t \right) \circ \pi \\ &= \left(Z \cdot x \frac{\partial \phi_Z^t}{\partial x} + Z \cdot y \frac{\partial \phi_Z^t}{\partial y} + Z \cdot F \frac{\partial \phi_Z^t}{\partial t} \right) \circ \pi \\ &= \left(Z \cdot \phi_Z^t + (Z \cdot F) \left(\frac{\partial \phi_Z^t}{\partial t} \right) \right) \circ \pi\end{aligned}$$

Or le flot vérifie $\frac{\partial}{\partial t} \phi_Z^t(x, y) = (Z \cdot \phi_Z^t)(x, y) = Z \circ \phi_Z^t(x, y)$. Par conséquent

$$\begin{aligned}Z \cdot \Psi &= \left(Z \circ \phi_Z^t + (Z \cdot F)(Z \circ \phi_Z^t) \right) \circ \pi \\ &= (1 + Z \cdot F)(Z \circ g) \circ \pi \\ &= (1 + Z \cdot F)Z \circ \Psi\end{aligned}$$

Finalement, $Z = (1 + Z \cdot F)Z \circ \Psi \cdot \Psi^{-1} = (1 + Z \cdot F)\Psi^* Z$ ■

2.2.3 Démonstration du théorème 1

Démonstration

1) Nous allons déterminer un changement de variables formel qui conjugue Z à $Z_P = PX_{k,\mu}$.

Intéressons nous aux changements de variables Ψ du lemme 2. On a :

$$\begin{aligned}
Z &= \Psi^* Z_P = \frac{1}{1 + Z_P \cdot F} Z_P \\
\Leftrightarrow UX_{k,\mu} &= \frac{1}{1 + PX_{k,\mu} \cdot F} PX_{k,\mu} \\
\Leftrightarrow U &= \frac{1}{1 + PX_{k,\mu} \cdot F} P \\
\Leftrightarrow PX_{k,\mu} \cdot F &= \frac{P}{U} - 1
\end{aligned}$$

Ainsi, déterminer un changement de variables qui nous intéresse revient à trouver une solution formelle F à l'équation homologique

$$PX_{k,\mu} \cdot F = \frac{P}{U} - 1 \quad (2)$$

Par le lemme 1, (2) admet une unique solution formelle grâce au choix de $F(0,0)$, on la note F_0 . On peut alors vérifier que $\phi_{Z_P}^{F_0}$ est un changement de variables formels qui convient. C'est-à-dire que Z_P et \tilde{Z} sont formellement conjugués.

2) Nous considérons un changement de variables formel Ψ conjuguant Z_P et Z_Q . Alors M. Berthier, D. Cerveau et R. Meziani ont montré que les équivalences formelles entre le champs $X_{k,\mu}$ et lui-même, tangentes à l'identité en x sont de la forme $\Psi = \phi_{X_{k,\mu}}^F$ où $F \in \mathbb{C}[[x, y]]$.

Nous avons alors

$$\Psi^* X_{k,\mu} = \frac{1}{1 + X_{k,\mu} \cdot F} X_{k,\mu} = \frac{Q}{P \circ \Psi} X_{k,\mu}$$

Et comme $U = 1$ le lemme 1 nous indique que si F est solution de l'équation homologique

$$\frac{Q}{P \circ \Psi} X_{k,\mu} \cdot F = \frac{P \circ \Psi}{Q} - 1$$

alors $\frac{P \circ \Psi}{Q} - 1$ ne contient pas de termes en x^j pour tout $j \leq k$. Mais $Q(0) \neq 0$ donc cela revient à dire que $P \circ \Psi$ et Q sont tangents en x à l'ordre k . On en déduit que la première coordonnée de Ψ est tangente à l'identité en x à l'ordre k c'est-à-dire $P = Q$.

Rappelons que $\alpha^k = 1$. On a de plus $\Gamma : (x, y) \mapsto (\alpha x, y)$ conjugue clairement $Z_{P \circ \Gamma}$ et Z_P . Et alors $P = Q \circ \Gamma$ d'où $P(x) = Q(\alpha x)$. ■

3 Classification analytique

3.1 Introduction

3.1.1 Définitions et notations

Définition 7 Deux champs de vecteurs Z et K sont analytiquement conjugués s'il existe un changement de variables analytique $\Psi = (\Psi_x, \Psi_y)$ tel que

$$\Psi^* Z := D\Psi^{-1} \left(Z(\Psi_x, \Psi_y) \right) = K$$

avec $D\Psi$ la différentielle de Ψ .

Définition 8 Un feuilletage ζ sur \mathbb{C}^2 est la donnée d'un champ de vecteur Z dont les composantes sont holomorphes sur \mathbb{C}^2 .

- Les zéros communs de A et B sont les points singuliers du feuilletage et on note cet ensemble $\text{sing}(\zeta) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; Z(x, y) = (0, 0)\}$.
- Le feuilletage holomorphe singulier induit par Z sur un voisinage V de $(0, 0)$ sera noté \mathcal{F}_Z .
- Cette partition de $V \setminus \{(0, 0)\}$ en courbes holomorphes constitue l'ensemble des courbes intégrales de Z restreintes à V , que l'on appellera feuilles du feuilletage.
- Une feuille qui peut se prolonger analytiquement en l'origine est appelée séparatrice.

Remarque :

1. Si Z est un noeud-col, Z possède une seule séparatrice correspondant à $\lambda_2 \neq 0$, tandis que celle associée à 0 n'a génériquement, qu'une existence formelle.
2. La grosse différence entre un feuilletage et un champ de vecteur réside dans le fait que ce dernier possède un facteur supplémentaire : *le temps*. Notons que deux champs de vecteurs différents peuvent représenter le même feuilletage :
Deux champs de vecteurs induisent le même feuilletage si et seulement si, ils ne diffèrent que par multiplication d'une unité.

Définition 9 Deux champs Z et K sont analytiquement équivalents s'il existe une série convergente U telle que Z est analytiquement conjugué à UK . Cela définit en réalité l'équivalence orbitale entre deux feuilletages (ceux induits par Z et K). On notera alors

$$Z \sim K$$

→ Remarquons qu'une *feuille* possède les propriétés suivantes :

1. Une feuille ne contient pas de singularité.
2. Une feuille est une variété complexe connexe par arcs.
3. Une feuille est contenue dans un ouvert.

→ Nous nous placerons sur un voisinage V de $(0, 0)$ et on supposera $\text{sing}(Z) = \{(0, 0)\}$. Nous avons besoin pour la suite, de définir et de se familiariser avec des secteurs fibrés.

Définition 10 1. On appelle secteur fibré de rayon $r > 0$, d'ouverture $0 < \delta \leq 2\pi$ et de direction θ l'ouvert

$$V(r, \theta, \delta) := \left\{ (x, y) : |y| < r, 0 < |x| < r, |\arg(x) - \theta| < \frac{\delta}{2} \right\}$$

2. Pour $r > 0$ et $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, et en faisant varier $j \in \mathbb{Z}/k$, on définit les $2k$ secteurs canoniques associés à Z par

$$\begin{aligned} V_j^{cn} &= V\left(r, (4j-1)\frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{k} + \frac{2\beta}{k}\right) \\ V_j^{nc} &= V\left(r, (4j+1)\frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{k} + \frac{2\beta}{k}\right) \end{aligned}$$

3. Pour $k > 1$ et $j \in \mathbb{Z}/k$, on définit le j^{ieme} secteur noeud par

$$V_j^n := V_j^{cn} \cap V_j^{nc}$$

et le j^{ieme} secteur col par

$$V_j^c := V_j^{nc} \cap V_{j+1}^{cn}$$

Remarque : On notera par la suite V_j^\sharp où \sharp représente soit le symbole nc (noeud-col) soit le symbole cn (col-noeud).

Définition 11 Pour une feuilletage \mathcal{F} , on définit l'espace des feuilles de \mathcal{F} au-dessus de V_j^\sharp

$$\Omega_j^\sharp := H_0(V_j^\sharp)$$

où H_0 est l'intégrale première de $X_{k,\mu}$ sur les secteurs V_j^\sharp .

Remarque : On sait que $H_0 = yx^\mu e^{x^{-k}/k}$.

LEMME 3 Pour r suffisamment petit, on a les assertions suivantes :

1. $\Omega_j = \Omega_j^\sharp = \Omega_j^n = \mathbb{C}$
2. $\Omega_j^c = M\mathbb{D}$ où $M > 0$ dépend de r, β, k, μ

Définition 12 Pour un feuilletage \mathcal{F} on définit son module de Martinet-Ramis par

$$m(\mathcal{F}) := (\varphi_j^c, \varphi_j^n)_j \in (\text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Aff}(\mathbb{C}))^k$$

où

$$\begin{cases} (\varphi_j^c)'(0) &= \exp(2i\pi\mu/k) \\ (\varphi_j^n)'(0) &= 1 \end{cases} \quad (3)$$

Remarque : Nous appellerons φ_j^c, φ_j^n , les *invariants de Martinet-Ramis*. Il s'agit en fait des applications de recollement entre les secteurs fibrés, comme nous le détaillerons plus tard.

3.1.2 Présentation de la démarche

→ Nous nous intéressons maintenant à la classification analytique de ce type de champs de vecteurs, c'est-à-dire lorsque les changements de variables convergent sur des secteurs particuliers.

H. Dulac a montré que le champs Z qui nous intéresse depuis le début, est *analytiquement équivalent* au champ suivant

$$\begin{aligned} X_R &= X_{k,\mu} + x^{k+1}R(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \\ &= x^{k+1}\frac{\partial}{\partial x} + (y(1 + \mu x^k) + x^{k+1}R(x,y))\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

avec R une fonction holomorphe sur un voisinage V de l'origine.

Remarque :

- Écrit dans ces coordonnées analytiques, on dit que Z est sous *forme pré-normale analytique*.
- Le problème est que cette forme n'est pas unique !

→ Énonçons le théorème de M.Hukuhara, T.Kimura, T.Matuda qui résoud le problème de classification orbitale analytique sectorielle.

THÉORÈME 2 *Soit Z un champ de vecteurs de type noeud-col sous forme pré-normale analytique. Pour tout $\beta, r > 0$ suffisamment petits, les champs Z et $X_{k,\mu}$ sont analytiquement équivalents sur chaque V_j^\sharp . Cette équivalence se prolonge continument sur la séparatrice.*

3.1.3 Recollement analytique

→ Soit Z un champ de vecteurs considéré comme précédemment. La section précédente et le théorème M.Hukuhara, T.Kimura, T.Matuda montrent que l'on peut conjuguer analytiquement Z à $X_{k,\mu}$ sur les secteurs fibrés V_j^\sharp . Il se pose alors un problème de «conjugaison globale».

→ Il paraît donc naturel de pouvoir recoller les feuilletages modèles (induits par $X_{k,\mu}$) dans les intersections V_j^n et V_j^c . Cela signifie que tout champ de vecteurs peut se conjuguer sectoriellement au même modèle. La *classification analytique* s'effectue donc au niveau des différences de recollement, ce qui correspond aux φ_j^\sharp .

3.2 Théorème de classification analytique

3.2.1 Énoncé

Notations : $\mathcal{F}_{k,\mu} = \mathcal{F}_{X_{k,\mu}}$ le feuilletage induit par $X_{k,\mu}$.

THÉORÈME 3 Soient \mathcal{F} et $\tilde{\mathcal{F}}$ deux feuilletages formelles conjugués à $\mathcal{F}_{k,\mu}$. Etant donnés les modules de \mathcal{F} et $\tilde{\mathcal{F}}$, on a

1. $\mathcal{F} \sim \tilde{\mathcal{F}}$ si et seulement si

$$(\exists a \in \mathbb{C}^*, \theta \in \mathbb{Z}/k; \forall j \in \mathbb{Z}/k) \begin{cases} \varphi_{j+\theta}^c(az) &= a\tilde{\varphi}_j^c(z) \\ \varphi_{j+\theta}^n(az) &= a\tilde{\varphi}_j^n(z) \end{cases}$$

2. Pour tout $(\varphi_j^c, \varphi_j^n)_j \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Aff}(\mathbb{C})$ satisfaisant aux conditions (3), il existe un feuilletage \mathcal{F} tel que $m(\mathcal{F}) = (\varphi_j^c, \varphi_j^n)_j$.

3. Si ϵ est un paramètre de \mathbb{C}^n et $\epsilon \mapsto \mathcal{F}_\epsilon$ est une famille analytique dont tous les éléments sont conjugués à $\mathcal{F}_{k,\mu}$, Alors on peut choisir $m(\mathcal{F}_\epsilon)$ de sorte que $\epsilon \mapsto m(\mathcal{F}_\epsilon)$ soit analytique.

→ Ce théorème détermine la classification analytique de deux feuilletages à singularité de type noeud-col.

3.2.2 Explications

→ Après recollement, il apparaît que la seule «différence» dans la conjugaison des feuilletages \mathcal{F} et $\tilde{\mathcal{F}}$ avec $\mathcal{F}_{k,\mu}$ est déterminée par les invariants de Martinet-Ramis.

→ La *partie 1)* du théorème signifie que deux feuilletages sont équivalents analytiquement si et seulement si leurs invariants de Martinet-Ramis sont globalement les mêmes.

→ La *partie 2)* signifie qu'à toute famille dans $(\text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Aff}(\mathbb{C}))$, on peut associer un feuilletage pour lequel cette famille constitue les invariants de Martinet-Ramis. Autrement dit, un feuilletage est entièrement déterminé par son module.

→ La *partie 3)* signifie enfin qu'à chaque feuilletage formellement conjugués à $\mathcal{F}_{k,\mu}$ d'une famille analytique, on peut associer un module de sorte que la famille des modules soit analytique.

3.2.3 Détails pour $k = 2$

→ Nous choisissons de détailler la méthode de recollement pour le cas $k = 2$. Ce cas présente l'avantage d'être facilement représenté géométriquement puisqu'il met en jeu $2 \times k = 4$ applications de recollements φ_j .

→ Sans perte de généralité, nous regardons un exemple de champs de vecteurs où $k = 2$.

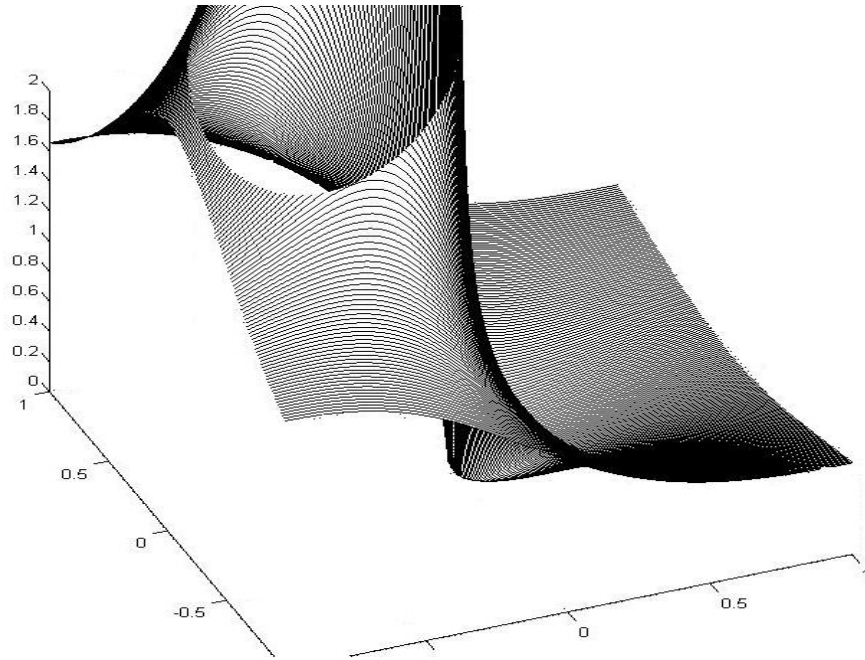


Fig. 1 : Ce schéma représente le champ de vecteurs $Z(x, y) = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ dans le repère $(Re(x), Im(x), |y|)$.

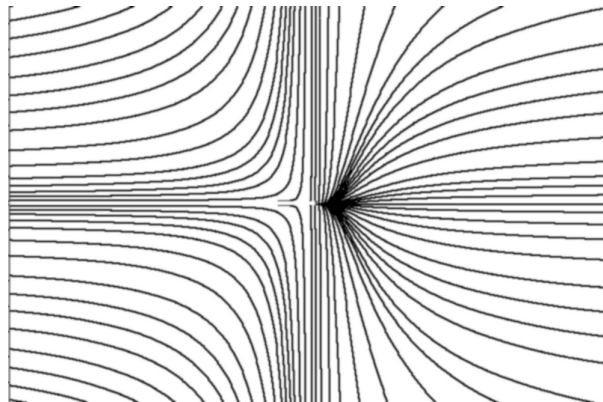


Fig. 1' : Ce schéma représente le même champ de vecteurs que ci-dessus vu dans un autre repère.

→ Les schémas de recollement sont globalement identiques quelque soit le champ de vecteurs considéré. Pour mieux se représenter le découpage des secteurs, on projette le champ de vecteur Z sur $\{y = 0\}$.

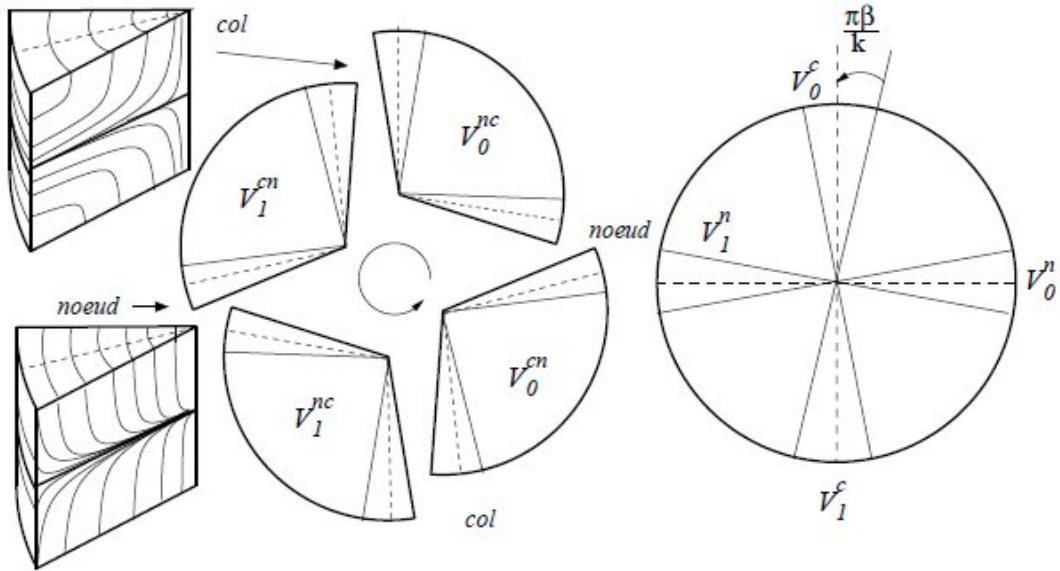


Fig. 2 : Ce schéma représente la structure sectorielle d'un noeud-col pour $k = 2$ (les secteurs angulaires sont vus en projection sur $\{y = 0\}$ alors que les parties col et noeud à gauche essaient de donner l'allure du feuilletage dans $\mathbb{R}^3 = \{Re(x), Im(x), Re(y)\}$). Lorsque l'on tourne dans le sens direct, un secteur nc possède d'abord une partie $noeud$ puis une partie col , et c'est l'inverse dans une partie cn .

→ Afin d'effectuer le recollement, nous nous plaçons dans l'espace des feuilles Ω_j^\sharp au-dessus de chaque secteur V_j^\sharp . Nous voyons ainsi apparaître les invariants de Martinet-Ramis φ_j^\sharp .

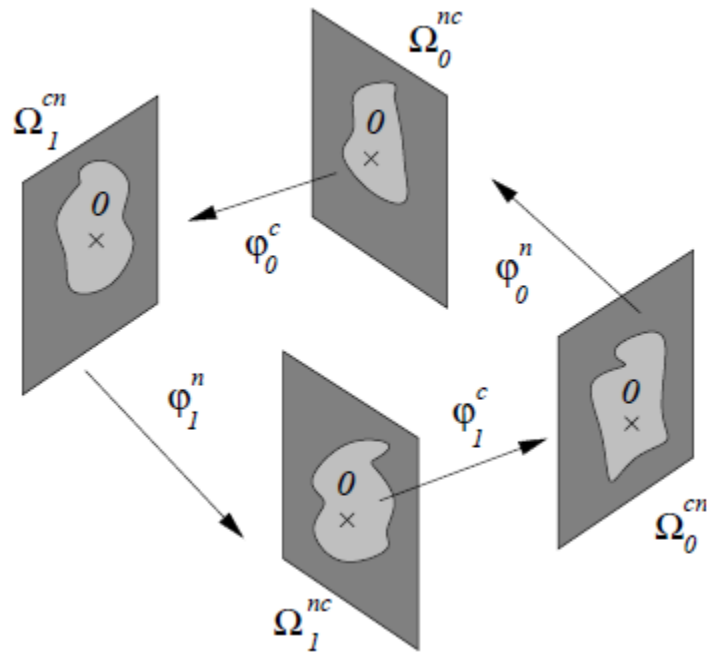


Fig. 3 : Ce schéma représente les invariants de Martinet-Ramis comme recollements des espaces des feuilles ($k = 2$). Le domaine plus clair autour de 0 représente l'espace des feuilles ω_j^c au-dessus d'un col.

→ Finalement, une fois le recollement effectué, nous avons déterminé les applications φ_j^\sharp . Ainsi le champ de vecteurs considéré rentre dans une certaine classe d'équivalence : si X est un autre champ de vecteurs dont ses applications de recollement sont $\tilde{\varphi}_j^\sharp$ et vérifie

$$(\exists a \in \mathbb{C}^*, \theta \in \{0, 1\}; \forall j \in \{0, 1\}) \begin{cases} \varphi_{j+\theta}^c(az) & = a\tilde{\varphi}_j^c(z) \\ \varphi_{j+\theta}^n(az) & = a\tilde{\varphi}_j^n(z) \end{cases}$$

Alors on en déduira qu'il appartient lui aussi à cette classe. Autrement dit d'après le théorème que Z et X sont analytiquement équivalents.

4 Conclusion

→ Au cours de notre étude, il est apparu que la classification formelle se traite plus facilement que la classification analytique. De plus, nous nous sommes restreints aux feuilletages, alors qu'il existe des théorèmes semblables s'appliquant aux champs de vecteurs. Ces théorèmes nécessitent par conséquent un paramètre supplémentaire, le temps ; ce qui rend l'étude plus complexe. La classification analytique se base sur un travail de recollement de secteurs et nous l'avons illustré dans le cas $k = 2$. En effet, cela nous a permis de bien comprendre le principe et les autres cas se traitent de façon identique.

→ Comme nous l'avons présenté dans l'introduction, il existe différents types de singularités. Ces singularités sont très importantes car leurs propriétés vont déterminer celles de n'importe quelle singularité. Nous avons traité brièvement le cas *noeud-col* et nous savons aujourd'hui que pour les singularités réduites, seul le cas d'une *selle irrationnelle* non linéarisable n'est pas traité. Si cela était résolu, on disposerait alors d'un outil géométrique d'analyse des problèmes de classification des champs de vecteurs.

Références

- [1] **Teyssier L.** *Equations homologiques et cycles asymptotiques d'une singularité noeud-col*, Pre-Print I.R.M.A. de l'université de Lille 1, 2001.
- [2] **Teyssier L.** *Equation homologique et classification analytique des germes de champs de vecteurs holomorphes de type noeud-col*, IRM de Rennes, 2003.
- [3] **Martinet J., Ramis J-P.** *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*, IHES, 1982.
- [4] **Loray F.** *Pseudo-Groupe d'une singularité de feuilletage holomorphe en dimension deux*, 2005.