Courbure et géométrie sous-Riemannienne

Davide Barilari (CMAP, École Polytechnique, Paris)

Journée Contrôle optimal Géometrique et Transport

- Université de Bourgogne, Dijon, France -

24 Septembre 2012

En collaboration avec

- Andrei Agrachev, Luca Rizzi (SISSA,Trieste)
- Paul Lee (The Chinese University of Hong Kong)

Introduction

Probléme fondamental en géométrie riemannienne : lien entre

- courbure
- propriétés géométriques et topologiques
- propriétés analytiques des opérateurs (laplacien)
- noyau de la chaleur

Obstruction 1. Pas de connexion naturelle en géométrie sous-riemannienne.

Récemment, beaucoup d'efforts pour généraliser la notion de "Ricci bounds" avec différentes techniques :

- transport optimale (MCP) $\longrightarrow$ Lott, Villani, Sturm, Ambrosio, Juillet etc.
- equation de la chaleur $\longrightarrow$ Garofalo, Baudoin, etc.

$\longrightarrow$ Il manque une précise notion de courbure

$\boxed{\text{Idée :}}$ $\longrightarrow$ La courbure apparaît dans l'asymptotique de la distance.

Obstruction 2. La distance n'est pas lisse en géométrie sous-riemannienne.

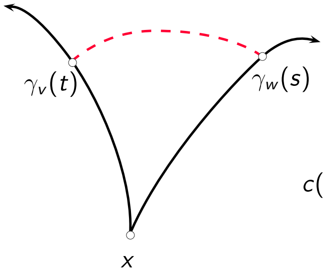
Plan

Plan

Courbure sectionnelle riemannienne

Soit (M, d) une varieté riemannienne et $x \in M$.

- Soient γ_v, γ_w deux géodésiques associées à $v, w \in T_xM$.



$$c(t,s) := \frac{1}{2} d^2(\gamma_v(t), \gamma_w(s))$$

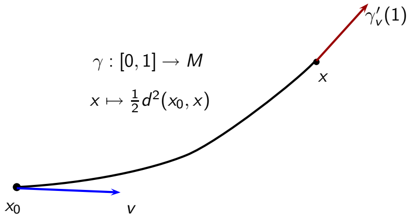
est lisse en $(0,0)$

On prévoit que le produit scalaire et la courbure apparaissent dans le développement asymptotique.

Lemma : derivée de d^2

Soit $x_0 \in M$ fixé et posons

$$\mu(x) = \frac{1}{2} d^2(x_0, x)$$



- μ est lisse en $x \iff \exists !$ géodésique minimale γ qui rejoint x_0 et x.
- $\nabla \mu(x) = \gamma'_v(1)$

Remarque. Si γ est une géodésique minimale qui rejoint x_0 et x en temps T, alors par homogeneité $\nabla \mu(x) = T\gamma'_v(T)$.

Remarque 2. Si on considère $c_t(x) := -\frac{1}{2t} d^2(x, \gamma_v(t))$ on a $\nabla c_t(x_0) = v$.

Développement asymptotique

Notons que

$$c(t,0) = \frac{t^2}{2}, \qquad c(0,s) = \frac{s^2}{2}$$

En plus en utilisant le lemma :

$$\frac{\partial c}{\partial s}(t,0) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \mu_{\gamma_v(t)}(\gamma_w(s)) = \langle \nabla \mu_{\gamma_v(t)}(x), \gamma_w'(0) \rangle = \langle -tv, w \rangle .$$

Symétriquement

$$\frac{\partial c}{\partial s}(t,0) = -t\,\langle v, w \rangle , \qquad \frac{\partial c}{\partial t}(0,s) = -s\,\langle v, w \rangle .$$

→ pas des termes "t^n, $s\,t^n$" et "s^n, $t\,s^n$" avec $n \geq 2$.

Développement asymptotique

Notons que

$$c(t,0)=\frac{t^2}{2}, \qquad c(0,s)=\frac{s^2}{2}$$

En plus en utilisant le lemma :

$$\frac{\partial c}{\partial s}(t,0)=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\mu_{\gamma_{\mathbf{v}}(t)}(\gamma_w(s))=\left\langle \nabla \mu_{\gamma_{\mathbf{v}}(t)}(x),\gamma_w'(0)\right\rangle=\langle -tv,w\rangle\,.$$

Symétriquement

$$\frac{\partial c}{\partial s}(t,0)=-t\,\langle v,w\rangle\,, \qquad \frac{\partial c}{\partial t}(0,s)=-s\,\langle v,w\rangle\,.$$

$\rightarrow$ pas des termes "t^n, $s\,t^n$" et "s^n, $t\,s^n$" avec $n\geq 2$.

Développement asymptotique

Notons que

$$c(t,0) = \frac{t^2}{2}, \qquad c(0,s) = \frac{s^2}{2}$$

En plus en utilisant le lemma :

$$\frac{\partial c}{\partial s}(t,0) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \mu_{\gamma_{\boldsymbol{v}}(t)}(\gamma_w(s)) = \left\langle \nabla \mu_{\gamma_{\boldsymbol{v}}(t)}(x), \gamma_w'(0) \right\rangle = \langle -tv, w \rangle \,.$$

Symétriquement

$$\frac{\partial c}{\partial s}(t,0) = -t \langle v, w \rangle \,, \qquad \frac{\partial c}{\partial t}(0,s) = -s \langle v, w \rangle \,.$$

$\rightarrow$ pas des termes "t^n, $s\,t^n$" et "s^n, $t\,s^n$" avec $n \geq 2$.

Développement asymptotique

Notons que

$$c(t,0) = \frac{t^2}{2}, \qquad c(0,s) = \frac{s^2}{2}$$

En plus en utilisant le lemma :

$$\frac{\partial c}{\partial s}(t,0) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \mu_{\gamma_{\mathbf{v}}(t)}(\gamma_w(s)) = \left\langle \nabla \mu_{\gamma_{\mathbf{v}}(t)}(x), \gamma_w'(0) \right\rangle = \langle -tv, w \rangle .$$

Symétriquement

$$\frac{\partial c}{\partial s}(t,0) = -t \langle v, w \rangle , \qquad \frac{\partial c}{\partial t}(0,s) = -s \langle v, w \rangle .$$

$\longrightarrow$ pas des termes "t^n, $s\,t^n$" et "s^n, $t\,s^n$" avec $n \geq 2$.

Développement asymptotique - 2

$$c(t,s) \simeq \underbrace{\frac{1}{2}(t^2+s^2) - \langle v,w\rangle\, ts}_{\text{euclidienne}} + \frac{1}{4}\partial_{ttss}c(0,0)t^2s^2 + \dots$$

Corollaire (voir aussi courbure de Ma-Trudinger-Wang)

$$-\frac{3}{2}\partial_{ttss}c(0,0) = \langle R(v,w)v, w\rangle \quad (= Sect(v,w))$$

- → En géométrie sous-riemannienne la géodésique n'est pas identifiée par le vecteur tangent
- → La fonction $c(t,s)$ n'est pas lisse en (0,0).

Développement asymptotique - 2

$$c(t,s) \simeq \underbrace{\frac{1}{2}(t^2+s^2) - \langle v,w\rangle\, ts}_{euclidienne} + \frac{1}{4}\partial_{ttss}c(0,0)t^2s^2 + \dots$$

Corollaire (voir aussi courbure de Ma-Trudinger-Wang)

$$-\frac{3}{2}\partial_{ttss}c(0,0) = \langle R(v,w)v,w\rangle \quad (= Sect(v,w))$$

→ En géométrie sous-riemannienne la géodésique n'est pas identifiée par le vecteur tangent

→ La fonction $c(t,s)$ n'est pas lisse en (0,0).

Développement asymptotique - 2

$$c(t,s) \simeq \underbrace{\frac{1}{2}(t^2+s^2) - \langle v,w\rangle\, ts}_{\textit{euclidienne}} + \frac{1}{4}\partial_{ttss}c(0,0)t^2s^2 + \dots$$

Corollaire (voir aussi courbure de Ma-Trudinger-Wang)

$$-\frac{3}{2}\partial_{ttss}c(0,0) = \langle R(v,w)v,w\rangle \quad (= Sect(v,w))$$

→ En géométrie sous-riemannienne la géodésique n'est pas identifiée par le vecteur tangent

→ La fonction $c(t,s)$ n'est pas lisse en (0,0).

Plan

Géométrie sous-riemannienne

Définition

Une variété sous-riemannienne est $(M, \mathcal{D}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ où

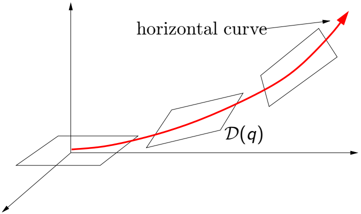
(*i*) M variété C^∞, dimension $n \geq 3$;

(*ii*) $\mathcal{D}$ est une distribution vectorielle de rang (constant) $k < n$, i.e. $q \in M \mapsto \mathcal{D}_q \subset T_qM$ sous-espace de dimension k.

(*iii*) $\langle\cdot,\cdot\rangle_q$ produit scalaire sur $\mathcal{D}_q$, lisse par rapport à q.

- Une courbe horizontale est une courbe $\gamma : [0, T] \to M$ telle que $\dot\gamma(t) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}$
  - Pour cette courbe on définit la longueur

$$\ell(\gamma) = \int_0^T \sqrt{\langle\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle}\, dt.$$



Si on suppose que $X_1, \ldots, X_k$ est une base locale orthonormale

$$\mathcal{D}_q = \mathrm{vect}\{X_1(q), \ldots, X_k(q)\}, \qquad \langle X_i(q), X_j(q)\rangle = \delta_{ij}.$$

pour une courbe horizontale on a

$$\dot\gamma(t) = \sum_{i=1}^k u_i(t) X_i(\gamma(t)),$$

$$\ell(\gamma) = \int_0^T \sqrt{\langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle}\, dt = \int_0^T \sqrt{\sum_{i=1}^k u_i(t)^2}\, dt$$

On peut définir la distance de Carnot-Carathéodory

$$d(q, q') = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma(0) = q, \gamma(T) = q', \gamma \text{ horizontale}\}.$$

Questions :

1. Est-ce que d est bien définie ?
2. Quelles sont les courbes minimisantes ?

Question 1.

Théorème (Chow-Rashewsky)

Si $\{X_1, \ldots, X_k\}$ *satisfait la condition du rang* $\dim Lie_q\{X_1, \ldots, X_k\} = n$ *alors le système*

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^{k} u_i X_i(q)$$

est commandable et d *est bien définie.*

Question 2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on peut se ramener au problème du contrôle (avec T fixé)

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^{k} u_i X_i(q) \qquad \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{i=1}^{k} u_i^2 \to \min$$

$$q(0) = q_0, \quad q(T) = q_1$$

Problème : Déterminer une trajectoire reliant q_0 à q_1 et minimisant le coût.

Théorème (Principe du maximum de Pontryagin)

Si $(u(t), q(t))$ est optimal, il existe $\lambda(t) \in T^*_{q(t)}M$ et $\nu \leq 0$ tels que $(q(t), p(t))$ est solution du système hamiltonien associé à

$$\mathcal{H}^\nu(\lambda, q, u) = \sum_{i=1}^{k} \langle \lambda, X_i(q) \rangle - \frac{\nu}{2} \sum_{i=1}^{k} u_i^2$$

$$\mathcal{H}^\nu(\lambda(t), q(t), u(t)) = \max_w \mathcal{H}^\nu(\lambda(t), q(t), w) \tag{1}$$

- $\nu = 1$ (cas normal) : la cond. (1) nous ramène à un seul système hamiltonien associé à $H(\lambda, q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \langle \lambda, X_i(q) \rangle^2$
- on paramétrise les géodésiques issues de q_0 avec

$$\Lambda_{q_0} = \{\lambda_0 \in T^*_{q_0}M, H(\lambda_0, q_0) = \frac{1}{2}\} \simeq S^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k}$$

- les extrema normaux sont lisses
- ils sont localement minimisants pour le coût

Théorème (Principe du maximum de Pontryagin)

Si $(u(t), q(t))$ est optimal, il existe $\lambda(t) \in T^*_{q(t)}M$ et $\nu \leq 0$ tels que $(q(t), p(t))$ est solution du système hamiltonien associé à

$$\mathcal{H}^\nu(\lambda, q, u) = \sum_{i=1}^k \langle \lambda, X_i(q) \rangle - \frac{\nu}{2} \sum_{i=1}^k u_i^2$$

$$\mathcal{H}^\nu(\lambda(t), q(t), u(t)) = \max_w \mathcal{H}^\nu(\lambda(t), q(t), w) \tag{1}$$

- $\nu = 0$ (cas anormal) : lisse ou non ? problème ouvert !

Remarque : une trajectoire peut être normale et anormale en même temps

Regularité de d^2

Théorème (Agrachev, d'après Trélat-Rifford)

Soit $x_0 \in M$ *et* $\mu(x) = \frac{1}{2}d^2(x_0, x)$. *Alors*

- μ *est* C^∞ *dans l'ensemble dense et ouvert*

$$\Sigma(x_0) = \{x \in M \,|\, \exists! \text{ minimisante non-anormale et non-conjuguée de } x_0 \text{ à } x\}$$

- $x \in \Sigma \Rightarrow d\mu(x) = \lambda_1$, *où* $\lambda_t, t \in [0, 1]$ *est la courbe extremale associée à* x.

→ Qu'est-ce qu'on peut dire en présence de courbes anormales ?

Corollaire

Soit $x_0 \in M$ *et* $\mu(x) = \frac{1}{2}d^2(x_0, x)$. *Alors*

- *s'il existe un courbe abnormale reliant* x_0 *et* x, *alors* μ *n'est pas lisse en* x.
- *si toute courbe reliant* x_0 *et* x *est anormale, alors* μ *n'est pas Lipschitz en* x.

Regularité de d^2

Théorème (Agrachev, d'après Trélat-Rifford)

Soit $x_0 \in M$ *et* $\mu(x) = \frac{1}{2}d^2(x_0, x)$. *Alors*

- μ *est* C^∞ *dans l'ensemble dense et ouvert*

$$\Sigma(x_0) = \{x \in M \,|\, \exists! \text{ minimisante non-anormale et non-conjuguée de } x_0 \text{ à } x\}$$

- $x \in \Sigma \Rightarrow d\mu(x) = \lambda_1$, *où* $\lambda_t, t \in [0,1]$ *est la courbe extremale associée à* x.

$\longrightarrow$ Qu'est-ce qu'on peut dire en présence de courbes anormales ?

Corollaire

Soit $x_0 \in M$ *et* $\mu(x) = \frac{1}{2}d^2(x_0, x)$. *Alors*

- *s'il existe un courbe abnormale reliant* x_0 *et* x, *alors* μ *n'est pas lisse en* x.
- *si toute courbe reliant* x_0 *et* x *est anormale, alors* μ *n'est pas Lipschitz en* x.

Plan

Hypothèse principale

Comme conséquence des théorèmes précédents l'hypothèse suivante est très naturelle :

Définition

Une géodésique normale $\gamma : [0, T] \to M$ est fortement normale si les restrictions $\gamma|_{[0,t]}$, $t \in [0, T]$ ne sont pas anormales.

$\to$ Si $\gamma(t)$ est une géodésique fortement normale, alors la fonction :

$$(t, q) \mapsto \frac{1}{2} d^2(q, \gamma(t))$$

est lisse pour $t > 0$ et q dans un voisinage de $q_0 = \gamma(0)$.

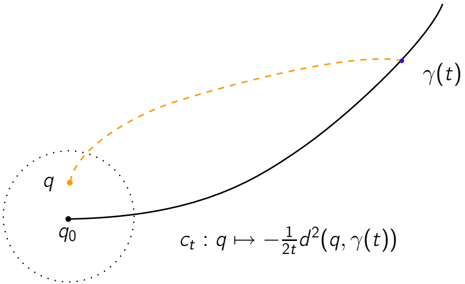
Remarque : Si $\gamma(t)$ est une géodésique fortement normale, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma|_{[0,\varepsilon]}$ ne contient pas des points conjugués.

La fonction "coût"

Soit $q_0 \in M$ et une géodésique fortement normale $\gamma(t) = \mathrm{Exp}(t, \lambda_0)$ on définit la famille de fonctions

$$c_t : M \to \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$c_t(q) = -\frac{1}{2t} d^2(q, \gamma(t))$$



- $d_{q_0} c_t = \lambda_0 \in T^*_{q_0} M$ (homogénéité $\rightarrow$ ne dépend pas de t !)
- la fonction $q \mapsto \dot{c}_t(q)$ a un point critique en q_0

On peut considérer la forme quadratique $d^2_{q_0} \dot{c}_t : T_{q_0} M \to \mathbb{R}$.

Remarque. Bien definie pour $t > 0$, singularité en $t = 0$.

Résultat principal

On considère la restriction à la distribution $d^2_{q_0}\dot{c}_t\big|_{\mathcal{D}_{q_0}} : \mathcal{D}_{q_0} \to \mathbb{R}$.

→ le produit scalaire sur $\mathcal{D}_{q_0}$ nous permet de définir une famille d'opérateurs auto-adjoints

$$Q_t : \mathcal{D}_{q_0} \to \mathcal{D}_{q_0}, \qquad d^2_{q_0}\dot{c}_t(v) = \langle Q_t v, v\rangle, \quad v \in \mathcal{D}_{q_0}$$

Théorème

Sous les hypothèses précédentes :

- *il existe* $\lim_{t\to 0} t^2 Q_t =: Q_0$
- *la famille* $t \mapsto t^2 Q_t$ *est lisse pour* $t > 0$
- *on a le développement limité*

$$Q_t \simeq \frac{1}{t^2}Q_0 + \frac{1}{3}\mathcal{R}_\lambda + O(t), \qquad \text{quand } t \to 0$$

→ Q_0 et $\mathcal{R}_\lambda$ sont des operateurs definis sur $\mathcal{D}_{q_0}$

Résultat principal

On considère la restriction à la distribution $d^2_{q_0}\dot{c}_t\big|_{\mathcal{D}_{q_0}} : \mathcal{D}_{q_0} \to \mathbb{R}$.

→ le produit scalaire sur $\mathcal{D}_{q_0}$ nous permet de définir une famille d'opérateurs auto-adjoints

$$Q_t : \mathcal{D}_{q_0} \to \mathcal{D}_{q_0}, \qquad d^2_{q_0}\dot{c}_t(v) = \langle Q_t v, v\rangle, \quad v \in \mathcal{D}_{q_0}$$

Théorème

Sous les hypothèses précédentes :

- *il existe* $\lim_{t\to 0} t^2 Q_t =: Q_0$
- *la famille* $t \mapsto t^2 Q_t$ *est lisse pour* $t > 0$
- *on a le développement limité*

$$Q_t \simeq \frac{1}{t^2} Q_0 + \frac{1}{3}\mathcal{R}_\lambda + O(t), \qquad \textit{quand } t \to 0$$

→ Q_0 et $\mathcal{R}_\lambda$ sont des operateurs definis sur $\mathcal{D}_{q_0}$

Cas riemannien

→ On peut appliquer le théorème dans le cas riemannien.

- $\mathcal{D}_{q_0} = T_{q_0}M$
- toutes les géodésiques sont fortement normales
- on peut replacer le covecteur λ par le vector tangent à la geodesique $\dot{\gamma}$

→ Le développement limité devient

$$Q_t \simeq \frac{1}{t^2}\mathbb{I} + \frac{1}{3}\mathcal{R}_{\dot{\gamma}} + O(t), \qquad quand\ t \to 0$$

où

$$\mathcal{R}_{\dot{\gamma}} : T_{q_0}M \to T_{q_0}M, \qquad \mathcal{R}_{\dot{\gamma}}(v) = R(\dot{\gamma}, v)\dot{\gamma}$$

et R est le tenseur de Riemann de M.

Corollaire

$$\Delta \dot{c}_t\big|_{q_0} \simeq \frac{n}{t^2} + \frac{1}{3}Ric(\dot{\gamma}) + O(t), \qquad for\ t \to 0$$

Cas riemannien

→ On peut appliquer le théorème dans le cas riemannien.

- $\mathcal{D}_{q_0} = T_{q_0}M$
- toutes les géodésiques sont fortement normales
- on peut replacer le covecteur λ par le vector tangent à la geodesique $\dot\gamma$

→ Le développement limité devient

$$Q_t \simeq \frac{1}{t^2}\mathbb{I} + \frac{1}{3}\mathcal{R}_{\dot\gamma} + O(t), \qquad \textit{quand } t \to 0$$

où

$$\mathcal{R}_{\dot\gamma} : T_{q_0}M \to T_{q_0}M, \qquad \mathcal{R}_{\dot\gamma}(v) = R(\dot\gamma, v)\dot\gamma$$

et R est le tenseur de Riemann de M.

Corollaire

$$\Delta \dot c_t\big|_{q_0} \simeq \frac{n}{t^2} + \frac{1}{3}Ric(\dot\gamma) + O(t), \qquad \textit{for } t \to 0$$

Cas riemannien

→ On peut appliquer le théorème dans le cas riemannien.

- $\mathcal{D}_{q_0} = T_{q_0}M$
- toutes les géodésiques sont fortement normales
- on peut replacer le covecteur λ par le vector tangent à la geodesique $\dot{\gamma}$

→ Le développement limité devient

$$Q_t \simeq \frac{1}{t^2}\mathbb{I} + \frac{1}{3}\mathcal{R}_{\dot{\gamma}} + O(t), \qquad quand\ t \to 0$$

où

$$\mathcal{R}_{\dot{\gamma}} : T_{q_0}M \to T_{q_0}M, \qquad \mathcal{R}_{\dot{\gamma}}(v) = R(\dot{\gamma}, v)\dot{\gamma}$$

et R est le tenseur de Riemann de M.

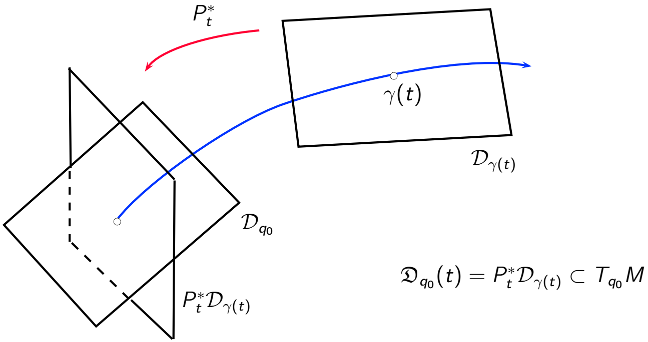
Corollaire

$$\Delta \dot{c}_t\big|_{q_0} \simeq \frac{n}{t^2} + \frac{1}{3}Ric(\dot{\gamma}) + O(t), \qquad for\ t \to 0$$

Le drapeau de la géodésique

En géométrie sous-riemannienne Q_0 est un operateur associé à la structure des crochet de Lie le long la géodésique.

On considère la famille des sous-espaces $\to \mathfrak{D}_{q_0}(t) = P_t^* \mathcal{D}_{\gamma(t)} \subset T_{q_0}M$



où P_t set le flot associé au control u.

Le drapeau de la géodésique - 2

Avec $t \mapsto \mathfrak{D}_{q_0}(t)$ on peut definir

$$\mathfrak{D}^i_{q_0}(t) = \text{vect}\left\{ \frac{d^j}{ds^j}\bigg|_{s=t} v(s),\ v(s) \in \mathfrak{D}_{q_0}(s), \forall j \leq i \right\} \subset T_{q_0}M$$

On calculera Q_0 sous la hypothèse additionnelle

$$\dim \mathfrak{D}^i_{q_0}(t) = const.$$

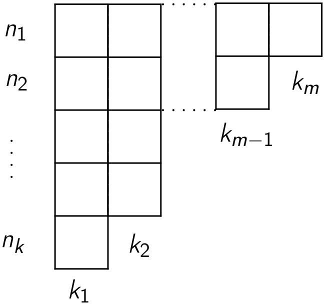
D'après cettes hypothèses il résulte

- $\text{vect}\{\mathfrak{D}_{q_0}(t), t > 0\} = T_{q_0}M$ (fortement normale)
- $\mathfrak{D}^i_{q_0}(0) = \text{vect}\left\{(\text{ad}^j\, T)(\mathcal{D})|_{q_0}, \forall j \leq i\right\} \subset T_{q_0}M$ ($\rightarrow$ où T ext. hor. de $\dot{\gamma}$)
- $\exists m \in \mathbb{N}$ t.q. $\mathfrak{D}_{q_0} \subset \mathfrak{D}^1_{q_0} \subset \ldots \subset \mathfrak{D}^m_{q_0} = T_{q_0}M$

Remarque. En général le drapeau de la géodésique est different de celui de la distribution.

Tableau de Young

- On définit $k_i = \dim \mathfrak{D}^i_{q_0} - \dim \mathfrak{D}^{i-1}_{q_0}$
- On peut montrer que (hypothèse k_i constante) $\rightarrow$ $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_m$,



$\sum_{i=1}^m k_i = n = \dim M$

Posons $n_j :=$ longueur de la j-eme ligne ($j = 1, \ldots, k$)

L'operateur Q_0

Ètant Q_0 un opérateur sur un espace euclidien, ses valeurs propres sont bien définis.

Théorème

Sous les hypothèses précédents $Q_0 : \mathcal{D}_{q_0} \to \mathcal{D}_{q_0}$ *satisait*

- $\mathrm{eig}\, Q_0 = \{n_1^2, \dots, n_k^2\}$
- $\mathrm{trace}\, Q_0 = n_1^2 + \dots + n_k^2$.

En particulier on peut écrire

$$\mathcal{N} := \mathrm{trace}\, Q_0 = k_1 + 3k_2 + 5k_3 + \dots + (2m-1)k_m$$

- Noter que $k_1 = \dim \mathcal{D}_{q_0}$ est la dimension de la distribution.
- En général $\mathcal{N} > n$. Il est une constante dimensionelle.
- Dans le group de Heisenberg (et tous 3D contact) $\mathcal{N} = 5$ pour toutes les géodésiques. En fait $k_1 = 2$ and $k_2 = 1$ (pas d'anormal).
- Dans le cas $2n+1$-dim. contact $\mathcal{N} = 2n + 3$ pour toutes les géodésiques. En fait $k_1 = 2n$ and $k_2 = 1$ (pas d'anormal).

L'operateur Q_0

Ètant Q_0 un opérateur sur un espace euclidien, ses valeurs propres sont bien définis.

Théorème

Sous les hypothèses précédents $Q_0 : \mathcal{D}_{q_0} \to \mathcal{D}_{q_0}$ satisait

- $eig\, Q_0 = \{n_1^2, \ldots, n_k^2\}$
- $trace\, Q_0 = n_1^2 + \ldots + n_k^2$.

En particulier on peut écrire

$$\mathcal{N} := trace\, Q_0 = k_1 + 3k_2 + 5k_3 + \ldots + (2m-1)k_m$$

- Noter que $k_1 = \dim \mathcal{D}_{q_0}$ est la dimension de la distribution.
- En général $\mathcal{N} > n$. Il est une constante dimensionelle.
- Dans le group de Heisenberg (et tous 3D contact) $\mathcal{N} = 5$ pour toutes les géodésiques. En fait $k_1 = 2$ and $k_2 = 1$ (pas d'anormal).
- Dans le cas $2n+1$-dim. contact $\mathcal{N} = 2n+3$ pour toutes les géodésiques. En fait $k_1 = 2n$ and $k_2 = 1$ (pas d'anormal).

Derivée seconde

Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse.

- $d_q^2 f$ est bien défini si q est un point critique

$\rightarrow$ qu'est-ce qu'on peut dire si $d_q f = \lambda \neq 0$ et M pas riemannienne ?
($\rightarrow$ pas de connexion)

- On considère la différentielle de f comme une fonction

$$df : M \to T^*M, \qquad df : x \mapsto d_x f$$

On peut définir la différentielle seconde en q comme

$$d_q^2 f = d_q(df) : T_q M \to T_\lambda(T^*M).$$

- l'image $d_q^2 f(T_q M) \subset T_\lambda(T^*M)$ est un sous espace Lagrangien en $T_\lambda(T^*M)$.

$\rightarrow$ l'espace de derivée seconde en λ est un espace affine sûr $Quad(T_q M)$
$\rightarrow$ si $\lambda = d_q f = 0$ on a que $d_q^2 f$ appartient a $Quad(T_q M)$.

Derivée seconde

Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse.

- $d_q^2 f$ est bien défini si q est un point critique

$\to$ qu'est-ce qu'on peut dire si $d_q f = \lambda \neq 0$ et M pas riemannienne ? ($\to$ pas de connexion)

- On considère la différentielle de f comme une fonction

$$df : M \to T^* M, \qquad df : x \mapsto d_x f$$

On peut définir la différentielle seconde en q comme

$$d_q^2 f = d_q(df) : T_q M \to T_\lambda(T^* M).$$

- l'image $d_q^2 f(T_q M) \subset T_\lambda(T^* M)$ est un sous espace Lagrangien en $T_\lambda(T^* M)$.

$\to$ l'espace de derivée seconde en λ est un espace affine sûr $Quad(T_q M)$

$\to$ si $\lambda = d_q f = 0$ on a que $d_q^2 f$ appartient a $Quad(T_q M)$.

Derivée seconde

Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse.

- $d_q^2 f$ est bien défini si q est un point critique

$\rightarrow$ qu'est-ce qu'on peut dire si $d_q f = \lambda \neq 0$ et M pas riemannienne ?
($\rightarrow$ pas de connexion)

- On considère la différentielle de f comme une fonction

$$df : M \to T^*M, \qquad df : x \mapsto d_x f$$

On peut définir la différentielle seconde en q comme

$$d_q^2 f = d_q(df) : T_q M \to T_\lambda(T^*M).$$

- l'image $d_q^2 f(T_q M) \subset T_\lambda(T^*M)$ est un sous espace Lagrangien en $T_\lambda(T^*M)$.

$\rightarrow$ l'espace de derivée seconde en λ est un espace affine sûr $Quad(T_q M)$
$\rightarrow$ si $\lambda = d_q f = 0$ on a que $d_q^2 f$ appartient a $Quad(T_q M)$.

Another definition of $\mathcal{R}_\lambda$

Si on applique la définition précédente à $c_t : M \to \mathbb{R}$ on définit la courbe de Jacobi

$$J_\lambda(t) := d^2_{q_0} c_t(T_{q_0}M) \subset T_\lambda(T^*M)$$

est une courbe de sous-espaces Lagrangiens dans un espace symplectique.

- cas riemannien : liée à l'ensemble des "champs de Jacobi".
- cas sous-riemannien : il faut utiliser une restriction de cette courbe (n'est pas régulière)

- L'operateur $\mathcal{R}_\lambda$ est la courbure de la courbe J_λ
- $\mathcal{R}_\lambda$ est 2-homogène p.r. λ ($\to$ i.e. $\mathcal{R}_{c\lambda} = c^2\mathcal{R}_\lambda$)
- $\mathcal{R}_\lambda$ jamais borné par rapport à λ
- $\mathcal{R}_\lambda$ pas quadratique (singularité quand $\lambda \to$ anormale)
- invariant symplectique du linéarisé du flot Hamiltonien
- formule explicite dans le cas de contact

Another definition of $\mathcal{R}_\lambda$

Si on applique la définition précédente à $c_t : M \to \mathbb{R}$ on définit la courbe de Jacobi

$$J_\lambda(t) := d^2_{q_0} c_t(T_{q_0} M) \subset T_\lambda(T^*M)$$

est une courbe de sous-espaces Lagrangiens dans un espace symplectique.

- cas riemannien : liée à l'ensemble des "champs de Jacobi".
- cas sous-riemannien : il faut utiliser une restriction de cette courbe (n'est pas régulière)

- L'operateur $\mathcal{R}_\lambda$ est la courbure de la courbe J_λ
- $\mathcal{R}_\lambda$ est 2-homogène p.r. λ ($\to$ i.e. $\mathcal{R}_{c\lambda} = c^2\mathcal{R}_\lambda$)
- $\mathcal{R}_\lambda$ jamais borné par rapport à λ
- $\mathcal{R}_\lambda$ pas quadratique (singularité quand $\lambda \to$ anormale)
- invariant symplectique du linéarisé du flot Hamiltonien
- formule explicite dans le cas de contact

Plan

Sous-Laplacien de $\dot{c}_t$

Si on définit la courbure de Ricci en λ

$$Ric(\lambda) := \operatorname{trace} \mathcal{R}_\lambda$$

en prenant la trace de le développement asymptotique

$$Q_t \simeq \frac{1}{t^2} Q_0 + \frac{1}{3}\mathcal{R}_\lambda + O(t), \qquad \textit{for } t \to 0$$

On trouve (rappel : $\dot{c}_t$ a un point critique en q_0)

Corollaire

$$\Delta \dot{c}_t\Big|_{q_0} \simeq \frac{\mathcal{N}}{t^2} + \frac{1}{3} Ric(\lambda) + o(t), \qquad \textit{for } t \to 0$$

Remarque : $\Delta = \sum_{i=1}^k X_i^2 + (\operatorname{div} X_i) X_i$. Premier ordre $= 0$ en un point critique.

Applications : sous-Laplacien de la distance SR

Comme consequence directe la théorie precedent on obtient une développement asymptotique pour le sous-Laplacien de la distance SR.

Théorème

Posons $\mu_t(q) = \frac{1}{2}d^2(q,\gamma(t))$. *(c.-à-d.* $\mu_t = -tc_t$*)*

- $\lim_{t\to 0} \Delta\mu_t = \mathcal{N}$
- $\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\Delta\mu_t = -\frac{2}{3}Ric(\lambda)$

Autrement dit

$$\Delta\mu_t\Big|_{q_0} \simeq \mathcal{N} + \boxed{?} - \frac{1}{3}Ric(\lambda)t^2 + o(t^2)$$

- le terme du premier ordre dépend du volume qu'on a choisi
- seulement le terme du premier ordre dépend du volume qu'on a choisi

Applications : sous-Laplacien de la distance SR

Comme consequence directe la théorie precedent on obtient une développement asymptotique pour le sous-Laplacien de la distance SR.

Théorème

Posons $\mu_t(q) = \frac{1}{2} d^2(q, \gamma(t))$. *(c.-à-d.* $\mu_t = -tc_t$*)*

- $\lim_{t\to 0} \Delta\mu_t = \mathcal{N}$
- $\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \Delta\mu_t = -\frac{2}{3} Ric(\lambda)$

Autrement dit

$$\Delta\mu_t\Big|_{q_0} \simeq \mathcal{N} + \boxed{?} - \frac{1}{3} Ric(\lambda) t^2 + o(t^2)$$

- le terme du premier ordre dépend du volume qu'on a choisi
- seulement le terme du premier ordre dépend du volume qu'on a choisi

Remarques

Dans le développement asymptotique

$$\Delta \mu_t \Big|_{q_0} \simeq \mathcal{N} + \boxed{?} - \frac{1}{3} Ric(\lambda) t^2 + o(t^2)$$

- cas riemannien : $\boxed{?} = 0$ avec le volume riemannien
- cas Heisenberg (et 3D contact) $\boxed{?} = 0$ avec le volume de Popp

Question. Est-ce que $\boxed{?} = 0$ toujours avec le volume de Popp ?

Théorème (Cas 2 colonnes)

$$\boxed{?} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \log\det\left((ad\ T)^* \circ ad\ T\big|_{\gamma(t)} \right)$$

où $adT : \mathcal{D}_{\gamma(t)} \to \mathcal{D}^2_{\gamma(t)}/\mathcal{D}_{\gamma(t)}$.

$\rightarrow$ avec le volume de Popp, si l'approximation nilpotente est constant le long les geodesiques alors $= 0$.

Remarques

Dans le développement asymptotique

$$\Delta\mu_t\big|_{q_0} \simeq \mathcal{N} + \boxed{?} - \frac{1}{3}Ric(\lambda)t^2 + o(t^2)$$

- cas riemannien : $\boxed{?} = 0$ avec le volume riemannien
- cas Heisenberg (et 3D contact) $\boxed{?} = 0$ avec le volume de Popp

Question. Est-ce que $\boxed{?} = 0$ toujours avec une volume générale ?

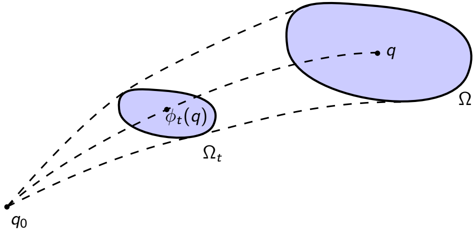
Théorème (Cas generale)

$$\boxed{?} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \log vol(\pi_* F_1, \dots, \pi_* F_n)\big|_{\gamma(t)}$$

où $F_1, \dots, F_n$ est une "base horizontale" en T^*M.

Proprieté de contraction de la mesure asymptotique

- $\Omega \subset M, q_0 \in M$
- $\mathfrak{f} = -\frac{1}{2} d^2(q_0, \cdot)$
- $\phi_t(q) := \pi \circ e^{t\vec{H}} \circ d\mathfrak{f}(q)$
- $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$
- $\Omega_0 = \Omega, \ \Omega_1 = \{q_0\}$



$$vol(\Omega_t) = \int_{\phi_t(\Omega)} vol = \int_\Omega \phi_t^* vol = \int_\Omega |g_t| vol.$$

Théorème

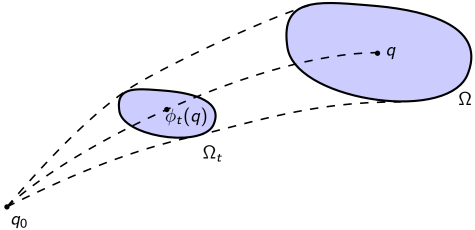
Quand $t \to 1$

$$g_t(q) = (1-t)^{\mathcal{N}(\lambda)}(1 + O(1-t)),$$

$$\frac{d}{dt} \log g_t(q) = -\frac{\mathcal{N}(\lambda)}{1-t} + \frac{1}{3} Ric(\lambda)(1-t) + O(t^2).$$

Proprieté de contraction de la mesure asymptotique

- $\Omega \subset M$, $q_0 \in M$
- $\mathfrak{f} = -\frac{1}{2} d^2(q_0, \cdot)$
- $\phi_t(q) := \pi \circ e^{t\vec{H}} \circ d\mathfrak{f}(q)$
- $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$
- $\Omega_0 = \Omega, \ \ \Omega_1 = \{q_0\}$



$$vol(\Omega_t) = \int_{\phi_t(\Omega)} vol = \int_\Omega \phi_t^* vol = \int_\Omega |g_t| vol.$$

Théorème

Quand $t \to 1$

$$g_t(q) = (1-t)^{\mathcal{N}(\lambda)}(1 + O(1-t)),$$

$$\frac{d}{dt} \log g_t(q) = -\frac{\mathcal{N}(\lambda)}{1-t} + \frac{1}{3} Ric(\lambda)\,(1-t) + O(t^2).$$

Problèmes ouverts et conclusion

$\rightarrow$ $MCP(\kappa, \mathcal{N})$

- trace Q_0 est liée à la MPC asymptotique.
- pour des resultats globaux on a besoin d'uniformité le long les géodésiques
- en ce moment on a des resultats partiels. (avec L. Rizzi)

$\rightarrow$ Remarques

- La definition de courbure s'applique aussi aux systemes de contrôle avec un "drift".
- En cette classe on peut trouver des modèles à courbure constante
- on peut avoir des théorèmes de comparaison.

$\rightarrow$ Asymptotique du noyau de la chaleur

- La fonction $c_t(q) = -\frac{1}{2t} d^2(q, \gamma(t))$ est le terme principal du développement asymptotique du noyau de la chaleur.
- Est-ce qu'on peut trouver la courbure en étudiant le noyau de la chaleur le long les géodésiques ?